

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математическая логика и теория алгоритмов
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Дифференцированный зачет

2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Годовой курс математической логики и теории алгоритмов преследует несколько целей. Во-первых, студентам на многих примерах показываются принципы формализации математических рассуждений. Показывается, что такое формальное определение, формальное утверждение и формальное доказательство. Во-вторых, для нескольких областей показывается взаимосвязь между синтаксисом языка, т.е. правилами построения корректных слов и предложений, и его семантикой, т.е. значением этих цепочек символов. В-третьих, даются основы теории вычислимости и показывается её связь с логикой и арифметикой. Наконец, отдельная часть курса посвящена теории множеств – основе всей математики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение общематематической терминологии (множества, отношения, функции).

#### Задачи дисциплины

- Выработать навык структурированного логического мышления.
- Научиться давать формальные определения и приводить примеры определяемых объектов.
- Научиться строить формальные записи математических утверждений и их доказательств и работать с этими записями.
- Научиться проводить математические рассуждения, не основанные на конкретных свойствах рассматриваемых объектов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;  
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;  
предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Арифметичные предикаты	6	6		
2	Булевы функции	8	8		
3	Выразимые предикаты	8	8		
4	Исчисление высказываний	8	8		30
5	Компактность в исчислении высказываний	6	6		
6	Однозначность разбора	8	8		
7	Пропозициональные формулы	8	8		
8	Формулы первого порядка	8	8		45
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

###### Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Арифметичные предикаты

Теорема Мальцева о компактности.

###### 2. Булевы функции

Мощности множеств

###### 3. Выразимые предикаты

Теории и модели. Выполнимость.

###### 4. Исчисление высказываний

Формулы первого порядка

###### Семестр: 2 (Весенний)

## 5. Компактность в исчислении высказываний

Выразимость предикатов

## 6. Однозначность разбора

Операции над множествами

## 7. Пропозициональные формулы

Отображения и соответствия

## 8. Формулы первого порядка

Автоморфизмы интерпретаций

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Начала теории множеств [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов. Ч.1 / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008 .— 128 с.
2. Вводный курс математической логики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, Н. К. Плиско .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2002, 2007 .— 128 с.
2. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2008 .— 288 с. - На обл. авт. не указаны .— (Современные лекционные курсы. Математическая логика и теория алгоритмов). - Библиогр.: с. 272-275. - Предм. указ.: с. 276-284. - Указ. имен: с. 285-288. - 1000 экз. - ISBN 978-5-94057-322-7) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

### Дополнительная литература

1. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова .— 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006 .— 256 с. - Библиогр.: с. 248-249. - Предм. указ.: с. 250-255.- ISBN 5-9221-0026-2 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;  
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;  
предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Осенний семестр

В осеннем семестре предусмотрен дифференцированный зачёт, который выставляется по итогам 6-7 контрольных работ и домашних заданий. Задачи делятся на 3 группы: тестовые, основные и дополнительные. Тестовые задачи представляют собой выбор из нескольких вариантов с одним или несколькими верными ответами и оцениваются по ответу. Максимальное число баллов за задачу – 0.8, частичные баллы обычно не ставятся. В ситуации перехода на онлайн-обучение нужно не только дать верный ответ, но и обосновать его. За полное решение даётся 1 балл, в случае верного ответа, но неверного обоснования можно исправить его и получить частичные баллы. Обычные задачи требуют записанного решения и оцениваются по системе зачёт/незачёт. При решении с первого раза даётся 1 балл, при незачёте на следующей контрольной даётся другая похожая задача на 0.8 балла, если и она не решена, то похожая задача выдаётся на дом на 0.5 балла. Если решены все задачи по некоторой теме, то выдаётся дополнительная задача на 1.5 балла. После проверки последней контрольной определяются пороги на оценки и даются итоговые зачётные задачи.

#### Весенний семестр

В весеннем семестре предусмотрен экзамен, но контрольные также проводятся, а домашние задания выдаются, баллы подсчитываются по тем же правилам. По итогам их решения выставляется оценка от 0 до 3. Остальные 7 баллов распределяются на устном экзамене. Из них до 2 баллов ставится за опрос по определениям и простым утверждениям, до 3 баллов за изложение доказательств теорем, полученных в билете (по одной из каждой темы: множества, логика и вычислимость) и ещё до 2 баллов за рассказ дополнительных более сложных вопросов.

#### Примеры тестовых задач

Пусть  $P$  - многочлен Жегалкина для функции  $f$  от  $n > 1$  переменных. Выберите верные утверждения:

$P$  содержит слагаемое 1 тогда и только тогда, когда  $f(0,0,\dots,0)=1$ ;

$P$  содержит слагаемое  $p_1 p_2 \dots p_n$  тогда и только тогда, когда  $f(1,1,\dots,1)=1$ ;

$P$  содержит слагаемое 1 тогда и только тогда, когда  $f(0,0,\dots,0)=0$ ;

$P$  содержит слагаемое  $p_1 p_2 \dots p_n$  тогда и только тогда, когда  $f(1,1,\dots,1)=0$ ;

Все предыдущие утверждения неверны.

Для каждой из этих равносильностей выберите один из трёх вариантов: (1) равносильность верна, получается однократным применением леммы о дедукции, (2) равносильность верна, но получается не по лемме о дедукции или неоднократным её применением, (3) равносильность неверна хотя бы в одну сторону.

$\Gamma \vdash (A \vee B) \rightarrow C \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash (B \rightarrow C)$

$\Gamma \vdash (A \vee B) \rightarrow C \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg C\} \vdash \neg(A \vee B)$

$\Gamma \vdash (A \vee B) \rightarrow C \Leftrightarrow \Gamma \cup \{A \vee B\} \vdash C$

$\Gamma \cup \{(A \vee B) \rightarrow C\} \vdash D \Leftrightarrow \Gamma \vdash ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow D$

$\Gamma \cup \{(A \vee B) \rightarrow C\} \vdash D \Leftrightarrow \Gamma \cup \{A \vee B\} \vdash C \rightarrow D$

Сколько автоморфизмов у данных интерпретаций? (Все символы понимаются стандартно, варианты ответа: указанное вами конечное число, счётное множество, континуальное множество, более чем континуальное множество)

$\langle \mathbb{Z}, <, = \rangle$

$\langle \mathbb{Q}, <, = \rangle$

$\langle \mathbb{Z}, +, = \rangle$

$\langle \mathbb{Q}, +, = \rangle$

$\langle \mathbb{I}, \text{adj} \rangle$  ( $\mathbb{I}$  - вершины правильного шестиугольника,  $\text{adj}(x,y)$  означает, что вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром).

Выберите верные утверждения:

В любой интерпретации любая формула эквивалентна некоторой бескванторной

Если в каждой из двух интерпретаций верна теорема об элиминации кванторов, то эти интерпретации элементарно эквивалентны

Если в интерпретации верна теорема об элиминации кванторов, то выразимы только предикаты, входящие в сигнатуру

Если в интерпретации любой выразимый предикат выразим бескванторной формулой, то в этой интерпретации верна теорема об элиминации кванторов

Все предыдущие утверждения неверны

### Примеры основных задач

Приведите формулу к наиболее коротким конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам.

Не опираясь на теорему о полноте исчисления высказываний, докажите выводимость формулы.

Поделите с остатком  $\omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4 + 2$  на  $\omega + 3$ .

Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности. Докажите, что существует неразрешимое множество  $A$ , такое что для любого  $k$  множество  $A \cap \{0, 1, \dots, k\}$  содержит не более  $f(k)$  элементов.

Выразите в арифметике принадлежность к множеству чисел вида  $n^n$ .

### Примеры дополнительных задач

Выразите формулой длины  $O(\log N)$  предикат «у  $x$  есть ровно  $N$  различных простых делителей» в интерпретации  $\langle \mathbb{N}, \cdot, = \rangle$ .

Докажите, что любая формула в интерпретации  $\langle \mathbb{N}, 0, S, = \rangle$  эквивалентна некоторой бескванторной. Докажите, что предикат « $x$  и  $y$  разной чётности» невыразим в этой интерпретации.

Выведите в исчислении предикатов с равенством формулу  $\forall x \forall y (x = f(y) \rightarrow y = g(x)) \rightarrow \forall x g(f(x)) = x$ .

Пусть задана некоторая главная универсальная нумерация вычислимых функций. Классифицируйте множество номеров машин Тьюринга, которые вычисляют последовательность Фибоначчи в арифметической иерархии, доказав в том числе оценку снизу, и докажите или опровергните его  $m$ -полноту на соответствующем уровне.

### Примеры простых утверждений из программы экзамена

Вывод правила обобщения в исчислении предикатов.

Сумма и произведение фундированных множеств фундированы, вполне упорядоченных – вполне упорядочены.

Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно пересечения и объединения, класса разрешимых относительно дополнения.

Построение комбинаторов сложения и умножения для нумералов Чёрча (с доказательством корректности).

### Примеры теорем из программы экзамена

Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул.

Теорема о делении с остатком вполне упорядоченных множеств.

Неперечислимость и некоперечислимость множества всюду определённых программ.

### Примеры дополнительных вопросов из программы экзамена

Теорема Чёрча о неразрешимости множества общезначимых формул.

Теорема Гудстейна о сходимости к нулю последовательности чисел, полученных чередованием вычитания единицы и замены основания в полном разложении в сумму степеней с коэффициентами.

Любое счётное вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству действительных чисел.

Построение неглавной универсальной вычислимой функции

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена:

1. Элементарная теория множеств.
2. Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами. Упорядоченные пары и кортежи, декартово произведение.
3. Отображения и соответствия. Понятия образа и прообраза. Инъекции, сюръекции и биекции. Композиция и обратное отображение.

4. Сравнение мощностей и понятие равнопомощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные и несчётные множества, их свойства.
5. Теорема Кантора. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности, теорема о классах эквивалентности.
6. Отношения частичного и линейного порядка. Минимальные/максимальные и наименьшие/наибольшие элементы. Свойства упорядоченных множеств. Операции над упорядоченными множествами. Изоморфизмы упорядоченных множеств.
7. Логика высказываний. Булевы переменные и функции. Построение пропозициональных формул.
8. Вычисление значения формулы на наборе значений переменных. Таблицы истинности.
9. Тавтологии и противоречия. Приведение формул к КНФ и ДНФ. Многочлены Жегалкина.
10. Полные системы связок, теорема Поста.
11. Исчисление высказываний. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Корректность исчисления высказываний.
12. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний. Непротиворечивые и совместные семейства формул.
13. Теорема о компактности для пропозициональных формул.
14. Языки первого порядка. Понятие сигнатуры. Построение формул первого порядка: теоремы, атомарные формулы, логические связки и кванторы.

Перечень вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

1. Параметры формулы. Понятие замкнутой формулы. Интерпретация сигнатуры. Истинность формулы в данной интерпретации на данной оценке.
2. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Замена связанной переменной.
3. Предварённая нормальная форма. Выражение предикатов в данной интерпретации формулами первого порядка.
4. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых предикатов.
5. Метод элиминации кванторов. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Игры Эренфойхта.
6. Исчисление предикатов и теория моделей. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.
7. Правило обобщения. Лемма о дедукции для исчисления предикатов. Корректность исчисления предикатов.
8. Непротиворечивые и совместные теории.
9. Теории и модели. Полные и экзистенциально полные теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Семантическое следование.
10. Теорема Мальцева о компактности.
11. Неклассические логики. Интуиционистское исчисление высказываний.
12. Конструктивное понимание логических связок. Модели Крипке. Модальная логика.
13. Системы аксиом для модальных логик. Семантика Крипке.
14. Формальные языки. Языки и грамматики. Иерархия Хомского.
15. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Лемма о разрастании.
16. Регулярные выражения. Контекстно-свободные грамматики.

Билет 1:

1. Сравнение мощностей и понятие равнопомощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные и несчётные множества, их свойства.;
2. Логика высказываний. Булевы переменные и функции. Построение пропозициональных формул.

Билет 2:

1. Элементарная теория множеств;
2. Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами. Упорядоченные пары и кортежи, декартово произведение.

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена и дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.